ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2025-2026

Série 14: Régression linéaire, théorème spectral et décomposition en valeurs singulières

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) appliquer la **méthode moindres carrées** ;

(O.2) **diagonaliser une matrice symétrique avec une base orthonormée de vecteurs propres** ;

(O.3) **calculer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice**.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- erreur d'approximation
- régression linéaire
- décomposition spectrale
- décomposition en valeurs singulières

Noyau d'exercices

1.1 Erreurs d'approximations et régressions linéaires

Pour le noyau : items (a), (i) et (ii) ; et (b), (i).

Exercice 1 (Erreurs d'approximations)
Pour chaque exemple de l'**Exercice** 7 de la **Série d'exercices** 13, calculer l'erreur $\|\mathbf{b} - A\hat{x}\|$ de l'approximation de $\mathbf{b}$ par $A\hat{\mathbf{x}}$, où $\hat{\mathbf{x}}$ est la solution de moindres carrées de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercice 2 (Régression linéaire)
Pour chaque ensemble de points

(a) $S_1 = \{(2,1),(5,2),(6,3),(8,3)\}$;

(b) $S_2 = \{(0,0),(1,1),(2,-1),(3,2),(4,0)\}$;

dans le plan, calculer la droite de régression linéaire respective.

1.2 Matrices symétriques et théorème spectral

Exercice 3 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques I)

Rappel de la théorie

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser ces matrices avec une matrice orthogonale.

Exercice 4 (Diagonalisation orthogonale de matrices symétriques II)

Rappel de la théorie

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la décomposition spectrale.

1.3 Décomposition en valeurs singulières

Pour le noyau : item (a).

Exercice 5 (Décomposition en valeurs singulières I)
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour le noyau : items (a) et (b).

Exercice 6 (Décomposition en valeurs singulières II)
Déterminer une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour compléter la pratique

2.1 Matrices symétriques

Exercice 7 (Matrices symétriques)
On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique si et seulement si $(A\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{v}\cdot(A\mathbf{w})$ pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

2.2 Décomposition en valeurs singulières

Exercice d'examen.

Exercice 8 (Décomposition en valeurs singulières III)
Soit A une matrice, et soient $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^{\mathrm{T}}A$, tels que

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } A\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

Exercice difficile.

Exercice 9 (Décomposition en valeurs singulières IV)
Calculer une décomposition en valeurs singulières $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$